Министерство образования и науки Республики

Дагестан.

Дагестанский институт развития образования

Эфендиев Э.И., Загиров Н.Ш.,

Мирзаев С.М., Гасанов М.Н.

Рекомендации по решению нестандартных задач УМК С.М. Никольского и др. и Ю.М. Колягина и др.

Махачкала 2017

УДК 373:51

Утверждено Ученым советом Дагестанского института развития образования (ДИРО)

Печатается по решению Учебно-методического совета ДИРО – протокол заседания

№ от .12.201

Регистрационный №

Эфендиев Э.И., Загиров Н.Ш., Мирзаев С.М., Гасанов М. Н.

Рекомендации по решению нестандартных задач УМК С.М. Никольского и др. и Ю.М. Колягина и др. – тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика/ ЭфендиевЭ.И., Загиров Н.Ш., Мирзаев С.М., ГасановМ.-К.Н.– Махачкала: 2017. –23 с.

Рецензенты:

Ризаев М.К. - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета.

Шахмарданова Р.С. – учитель математики СОШ №1 г. Каспийска, обладатель гранта президента РФ, призер I и II математических олимпиад РД.

Данное учебно-методическое пособие поможет подготовиться к сдаче ЕГЭ по структуре КИМов 2018 года. В нем приведены реомендации к решению нестандартных уравнений и неравенств и задач на делимость чисел. В каждом параграфе имеются задания для самостоятельного решения и ответы к ним.

Оглавление

Введение

В главе II, [2] сформулированы утверждения, с помощью которых решают сложные уравнения, неравенства и системы. В §1 мы приводим наиболее оригинальные утверждения, с помощью которых решаются нестандартные задачи повышенного и высокого уровня сложности. Решенные нами примеры взяты из заданий для самостоятельного решения учебника.

В ведении к главе 2 учебника [1] подчеркивается, что «при любом достаточно глубоком математическом исследовании приходится сталкиваться со сравнительно простыми теоретико-числовыми фактами. Отдельные положения теории чисел находят применение в теории телефонных сетей, в криптографии (тайнопись, кодирование), в теории приближенных вычислений , в физике и биологии».

Да и в задании 19 высокого уровня сложности профильного уровня и задании 20 базового уровня зачастую невозможно обойтись без признаков делимости.

Поэтому задачам на неделимость чисел нужно обратить особое внимание. В наших рекомендациях мы будем придерживаться терминологии [1] и решать, в основном, задачи повышенного и высокого уровня сложности из заданий для самостоятельного решения из этого учебника .

§ 1 Нестандартные задачи в учебнике С.М.Никольского и др. «Алгебра и нач.мат.анализа , 11 кл., М., Просвещение 2017 г.»

В § 9.4 доказывается

Теорема 1. Пусть область существования функции $f(u)$ есть промежуток М и пусть эта функция строго монотонна (т.е. возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда уравнение $f\big(\alpha(x)\big) = f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases}\alpha(x) = \beta(x)\\ \alpha(x) \in M\end{cases} \text{ \textit{или системе} } \begin{cases}\alpha(x) = \beta(x)\\ \beta(x) \in M\end{cases}$$

Пользуясь этой теоремой, решим несколько заданий для самостоятельного решения из этого учебника.

1. Решить уравнение:

$$log_{0,2} \sin x - 5^{sin\,x} - \sqrt[4]{\sin x} = log_{0,2}\,(-\cos\ x) - 5^{-cos\,x} - \sqrt[4]{-\cos x}$$

Решение. ОДЗ функции $f(u) = log_{0,2}u - 5^u$ - $\sqrt[4]{u}$ является интервал (0;+∞). Т.к. функция убывает на этом интервале, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}sin\,x = -\,cos\,x\\ sin\,x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tg\ x = -1\\ sin\,x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -\frac{n}{4} + nк\\ sin\,x\ > 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

2.Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{x^2 - x - 3} + \sqrt{x^2 - x + 5} = \sqrt[4]{2x + 1} + \sqrt{2x + 9}$$

Решение. ОДЗ функции $f(u) = \sqrt[4]{u} + \sqrt{u + 8}$ является промежуток [0;+∞) , на котором эта функция возрастает. Тогда данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 2x + 1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ: 4.

3.Решить уравнение: $\sqrt[4]{tgx} + \sqrt{tgx + 1} = \sqrt[4]{2 - ctgx} + \sqrt{3 - ctgx}$

Решение: Функция $f(u) = \sqrt[4]{u} + \sqrt{u + 1}$ возрастает на (0;+∞). Тогда данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} tgx = 2 - ctgx \\ tgx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tgx = 2 - \frac{1}{tgx} \\ tgx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg^2x - 2tgx + 1 = 0 \\ tgx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ tgx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ tgx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

4.Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt[4]{x^2 + 5} + \sqrt[6]{x^2 + 6} = \sqrt{4x} + \sqrt[4]{4x + 1} + \sqrt[6]{4x + 2}$$

Решение: Функция *f(u)*= $\sqrt{u} + \sqrt[4]{u + 1} + \sqrt[6]{u + 2}$ возрастает на *u*$\in [0; +\infty)$. Поэтому на этом промежутке данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 + 4 = 4x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2

5.Решить уравнение:

$$\pi^{x^2+1000} + \sqrt[9]{x^2 + 1000} = \pi^{2002x-1001} + \sqrt[9]{2002x - 1001}$$

Решение: Функция *f(u)*=$\pi^u + \sqrt[9]{u}$ возрастает на R. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению: $x^2 + 1000 = 2002x - 1001 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2002x + 2001 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2001. \end{array}\right.$$

Ответ: {1;2001}.

6. Решить уравнение: $(\frac{1}{3})^{\sin x}$-$(\sin x)^{2001}$=$(\frac{1}{3})^{sin^2 x}$- $(\sin x)^{4002}$

Решение: Функция $f(u)$= $(\frac{1}{3})^u$ -u^{2001} убывает на R. Поэтому наше уравнение равносильно следующему:

$$\sin x = sin^2 x \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1) == 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \sin x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n, n\in Z \\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k/n, k \in Z\right\}$

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $\log_{0,5} tg\ x + \left(\frac{1}{3}\right)^{tg\ x} - \sqrt[7]{tg\ x} = \log_{0,5} ctg\ x + \left(\frac{1}{3}\right)^{ctg\ x} - \sqrt[7]{ctg\ x}$

$\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z\right)$

2. $\sqrt{x^2 - 5}$ +$\sqrt[4]{x^2 - 3}$ =$\sqrt{x + 1}$ +$\sqrt[4]{x + 3}$ (3)

3. $\sqrt{\sin x - 0{,}1}$ + $\sqrt[4]{\sin x + 0{,}9}$ = $\sqrt{\cos x + 0{,}9}$ +$\sqrt[4]{\cos x + 1{,}9}$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon z\right)$

4. $\sqrt{x + 1}$ +$\sqrt[4]{2x + 3}$ + $\sqrt[6]{3x + 7}$ =$\sqrt{2x}$ +$\sqrt[4]{4x + 1}$ + $\sqrt[6]{6x + 4}$ (1)

5. $e^{x2} - 4x + 5 + \sqrt[3]{x^2} - 4x + 5 = e^{2x^{2-3x+7}} + \sqrt[3]{2x^2} - 3x + 7$ (∅)

6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{sin\ x} - \sqrt[5]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{cos\ x} - \sqrt[5]{\cos x}$ $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon z\right)$

В параграфе 9.7 приведена

Теорема 2. Если функция *f(u)* возрастет в промежутке М области своего существования, то неравенство $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \alpha(x) > \beta(x) \\ \alpha(x) \epsilon M \\ \beta(x) \epsilon M. \end{cases}$$

Если же *f(u)* убывает на М, то неравенство $f\left(\alpha(x)\right) > f\left(\beta(x)\right)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \alpha(x) < \beta(x) \\ \alpha(x) \epsilon M \\ \beta(x) \epsilon M \end{cases}$$

С помощью этой теоремы решим несколько заданий для самостоятельного решения из этого параграфа.

Решить неравенство:

$$\sqrt{\log_2(x-3)} + 10^{\log_2(x-3)} < \sqrt{\log_2(x^2-3x)} + 10^{\log_2(x^2-3x)}.$$

Решение: Функция $f(u) = \sqrt{u} + 10^u$ возрастает на промежутке $[0{:}\infty)$ своего определения.

Тогда исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \log_2(x-3) < \log_2(x^2-3x) \\ \log_2(x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-3 < x^2-3x \\ x-3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1) > 0 \\ x \geq 4. \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Ответ: $[4; +\infty)$.

В § 10.2 при решении задач авторы используют известные утверждением:

Теорема 3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$) неотрицательны на множестве М, то на этом множестве уравнения:

$f(x) = g(x)$ *и* $f^{2m}(x) = g^{2m}(x)$, $m \in N$ равносильны.

Разберем примеры.

Решить уравнение : $1 + \cos x = |\sin x|$.

Решение. Так как при $1 + \cos x \geq 0$ и $|\sin x| \geq 0$, то можно возвести обе части данного уравнения в квадрат : $(1 + \cos x)^2 = \sin^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x + \cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix}\cos x = 0\\ \cos x = -1\end{smallmatrix}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + 2\pi k / n, k \in Z\right\}$

2.Решить уравнение: $\sqrt[3]{x+2} = \sqrt{-x}$

Решение. При $x \in$ [-2;0] обе части данного уравнения неотрицательны.

Поэтому данное уравнение на промежутке [-2;0] равносильно уравнению : $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^6 = \left(\sqrt{-x}\right)^6 \Leftrightarrow (x+2)^2 = (-x)^3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + {}$ ${}+1) + 4(x+1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Ответ: -1.

3. Решить уравнение: $\sqrt[3]{5-2x} = \sqrt{3-x}$.

Решение. На множестве $\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2{,}5$

обе части уравнения неотрицательны, поэтому при $x \in (-\infty; 2{,}5] \equiv$ M

уравнение равносильно следующему :

$(\sqrt[3]{5-2x})^6 = (\sqrt{3-x})^6 \Leftrightarrow (5-2x)^2 = (3-x)^3 \Leftrightarrow 25 - 20x + 4x^2 = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0.$

Если последнее уравнение имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена. Подбором находим, что x=2 (2∈M!) является корнем уравнения. Разделив x^3-5x^2+7x-2 столбиком на x-2, получим:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = (x-2)(x^2 - 3x + 1)\ .$$

Уравнение $x^2 - 3x + 1$=0 имеет корни $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin M$ и $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in M$

Ответ: $\left\{2;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Задания для самостоятельного решения .

Решить уравнения :

1. $\sqrt{1-\cos x} = |\sin x|$ $\left(\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n; 2\pi k | n, k \in Z\right\}\right)$
2. $\sqrt[3]{x} = \sqrt{x-4}$ $(\{4\})$
3. $\sqrt[3]{x} = \sqrt{2-x}$ $(\{1\})$
4. $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt{x-1}$ $(\{5\})$
5. $\sqrt[3]{3-2x} = \sqrt{2-x}$ $\left(\left\{1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$
6. $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$ $(\{7\})$
7. $\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt{x+2}$ $\left(\left\{-1;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$

В § 10.3, приведена известная

Теорема 4. Если функция *φ(x)* определена и отлична от нуля в каждой точке множества M, то на M имеет место равносильность уравнений:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$$

Другими словами, обе части уравнения можно умножить на отличное от нуля выражение.

Рассмотрим **примеры**.

1. Решить уравнение: $\frac{|x-2|-x}{|2x-1|+|x|} = \frac{|2x-1|-|x|}{|x-2|+|x|}$.

Решение: Т.к функция $\varphi\ (x)$ $=(|2x-1|+|x|)(|x+2|+|x|)$ нигде в R не обращается в нуль, то умножая обе части данного уравнения на $\varphi\ (x)$, получим равносильное уравнение :

$$(x-2)^2-x^2=(2x-1)^2-x^2 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{-1;1\}$

Решить уравнение: $\frac{2cosx}{\sqrt{\pi^2-4x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}$

Решения. Функция $f(x)=\sqrt{\pi^2-4x^2}$ не равна нулю при $x \neq \pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ и определена при π^2-4$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \leq x \leq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$.

Поэтому данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2cosx=\sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z \\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$$

Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнения:

1. $\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{x}}$ $(\{4\})$

2. $\frac{2\sin x}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ $\left(\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}\right)$

3. $\frac{2\sin x}{\sqrt{3-2x-2^x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ $\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)$

4. $\frac{2\cos x}{\sqrt{\pi^2-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{\pi^2-x^2}}$ $\left(\left\{\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}\right)$

В параграфе 12 приведено

Утверждение. Уравнение: $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

С помощью этого утверждения легко решаются некоторые уравнения.

1. Решить уравнение

$$\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| + \left|\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sin x + \cos x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Решение: Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in z$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\}$.

2. Решить уравнение:

$$|\log_3 x - 2| + |x^2 - 11x + 18| = \log_3 x - x^2 + 11x - 20.$$

Решение: В силу приведенного утверждения данное уравнение равносильно системе (здесь $f(x) = \log_3 x - 2, g(x) = -x^2 + 11x - 18$):

$$\begin{cases} \log_3 x - 2 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ (x-2)(x-9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ 2 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнения:

1. $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| + \left|\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\left(\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\,\epsilon\, Z\ \right)$$

2. $|2^x-4|+\ \left|4-\sqrt{x}\right|=2^x=\sqrt{x}$ $\qquad$ ([2; 16])

Параграф 13. 3 посвящен использованию ограниченности функций. В **частности, приводится**

Теорема 5. Пусть М - пересечение ОДЗ функций *f(x)* и *g(x)* и для $\forall\ x\epsilon$М справедливы неравенства *f(x)*$\geq A$ и *g(x)*$\leq A$ (A – некоторое число.) Тогда:

а) Уравнение *f(x)*=*g(x)* равносильно системе $\begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$ $\qquad$ (*)

б) Неравенство $f(x)\leq g(x)$ равносильно системе (*).

В этом же параграфе приводится известное числовое неравенство

$a+\frac{1}{a}\geq 2.$ $\qquad$ (**)

Приведём **решение примеров.**

1. Решите уравнение: $tg^2x+ctg^2x=2sin^2\sqrt{\frac{5\pi^2}{16}-x^2}$.

Решение. В силу (**) в ОДЗ М уравнения выполняется неравенство: $tg^2x+ctg^2x\geq 2$. Очевидно, что в ОДЗ М данного уравнения выполняется неравенство: $2sin^2\sqrt{\frac{5\pi^2}{16}-x^2}\leq 2$.

Тогда в силу теоремы 5 данное уравнение в М равносильно системе:

$$\begin{cases} tg^2x+ctg^2x=2 \\ sin^2\sqrt{\frac{5\pi^2}{16}-x^2}=1 \end{cases} \qquad (1)$$

Решением второго уравнения системы являются те значения x, для которых

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{5\pi^2}{16} - x^2 \geq 0}, \\ \boldsymbol{\sqrt{\frac{5\pi^2}{16} - x^2} = \frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}, \\ x = \frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Полученные значения x удовлетворяют первому уравнению системы (1).

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$.

2. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 + x + x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+x+x}} \leq 2 - ln^2(x^2 + x + 1)$.

Решение: ОДЗ данного уравнения: $x \in$R , т.к. $x^2 + x + 1 > 0$ для $\forall$x$\in$R . В силу теоремы 5 данное неравенство в R равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+x+x}} = 2 \\ 2 - ln^2(x^2 + x + 1) = 2 \end{cases} \qquad (2)$$

Решим второе уравнение системы:

$$ln(x^2 + x + x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Полученные значения x удовлетворяют первому уравнению системы (2).

Ответ: $\{-1; 0\}$

3. Решить неравенство: $\frac{\sqrt{sinx+2}+\sqrt{cosx+2}}{2} \leq \sqrt[4]{sinx \cdot cosx + 2sinx + 2cosx + 4}$

Решение: Перепишем данное неравенство в виде:

$$\sqrt{sinx + 2} + \sqrt{cosx + 2} \leq 2\sqrt[4]{(sinx + 2)(cosx + 2)} .$$

Так как $sinx + 2 \geq 1$и $cosx + 2 \geq 1$, то обе части неравенства можно возвести в квадрат:

$$sinx + 2 - 2\sqrt{(sinx + 2)(cosx + 2)} + cosx + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{sinx + 2} -$$

$$-\sqrt{cosx + 2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow sinx - cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z .$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$.

4. Решить неравенство: $|sinx| + \frac{1}{|sinx|} \leq 2 - x^2 - \pi x - \frac{\pi^2}{4}$.

Решение: Перепишем данное неравенство в равносильном виде:

$|sinx| + \frac{1}{|sinx|} \leq 2 - (x + \frac{\pi}{4})^2$. Так как $|sinx| + \frac{1}{|sinx|} \geq 2$ в ОДЗ уравнения в силу (**), а $2 - (x + \frac{\pi}{2})^2 \leq 2$, то по теореме 5 данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} |sinx| + \frac{1}{|sinx|} = 2 \\ 2 - (x + \frac{\pi}{4})^2 = 2 \end{cases}$. Решение второго уравнения системы - $x = -\frac{\pi}{2}$. Это решение удовлетворяет и первому уравнению системы.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить уравнение: $\frac{cos^2 2x}{sin^8 x} + \frac{sin^2 x}{cos^2 2x} = 2cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}$ $\left(\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}\right)$

2. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 3{,}5x + 3{,}5} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3{,}5x + 3{,}5}} \leq 2 - sin^2 \pi x$ $(\{1\})$

б) $\frac{\sqrt{sinx+2} + \sqrt{cosx+3}}{2} \leq \sqrt[4]{sinx \cdot cosx + 3sinx + 2cosx + 6}$

$\left(\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k / k \in Z\right\}\right)$

в) $|cosx| + \frac{1}{|cosx|} \leq 2 - x^2 + 2\pi x - \pi^2$ $(\{\pi\})$

г) $|tgx| + \frac{1}{|tgx|} \leq 2 - x^2 + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{16}$ $\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)$

д) $|ctgx| + \frac{1}{|ctgx|} \leq 2 - x^2 - \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{16}$ $\left(\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}\right)$

§2. Задачи на делимость чисел в учебнике Ю.М.Колягина и др.

«Алгебра и нач.мат.анализа, 10 кл., М., Просвещение 2017 г.»

Приведем сначала признаки делимости чисел:

1. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.
2. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.
3. Натуральное число $n > 9$ делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме двух последних, делится на 4.
4. Натуральное число $n > 99$ делится на 8 тогда и только тогда, когда трёхзначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме трёх последних, делится на 8.
5. Натуральное число $n > 3$ делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).
6. Натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^n a_n$ делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$.

Здесь же напомним и некоторые **свойства делимости чисел.**

1) Если число a делится на каждое из чисел m, n, причем m и n – взаимно простые числа (то есть их НОД равен 1), то a делится на их произведение.
2) Если число a делится на b, то a делится на любой из делителей числа b.
3) Если каждое из чисел a_1, a_2, …,a_n делится на b, то их сумма также делится на b.
4) Если хотя бы одно из чисел a_1, a_2, …,a_n делится на b, то их произведение делится на b.
5) Если a делится на m, то a^k делится на m^k.

Перейдем к решению примеров.

1. Найдите шестизначное число, кратное 24, составленное из цифр 1 и 6.

Решение. Так как числа 3, 4 и 8 являются делителями 24, то они также являются делителями искомого числа n. Т.к. число n кратно 4, то его последние две цифры 16. Т.к. число n кратно 8, то его последние три цифры 616. .Т.к число n кратно 3, то сумма его цифр кратна 3. Сумма последних трёх цифр равна 6+1+6=13, откуда сумма первых трёх цифр равна одному из чисел 5, 8, 11, 14, 17, 20, …Единственным числом из этой последовательности, которое является суммой трёх возможных цифр, является 8=1+1+6. Всевозможные варианты искомых чисел: 116616, 161616 и 611616.

2. Доказать, что число $16^{20}+2^{76}$ делится на 17.

Решение: $16^{20}+2^{76}=(2^4)^{20}+2^{76}=2^{80}+2^{76}=2^{76}(2^4+1)=2^{76}\cdot 17$, что и требовалось доказать.

3. Делится ли число 2001^4-1322^4 на 679?

Решение: $2001^4-1322^4=(2001-1322)\cdot(2001+1322)\cdot(2001^2+$ $+1322^2)=679\cdot 3323\cdot(2001^2+1322^2)$.

Ответ: делится.

4. Натуральные числа $5n+1$ и $7n+2$ делятся на натуральное число m>1. Найти m.

Решение. Так как числа $5n+1$ и $7n+2$ делятся на m, то и число $5(7n+2)-7(5n+1)=3$ должно делиться на m. Но единственное натуральное число большее 1, на которое делится 3, равно 3.

Ответ: 3.

5. Пусть x и y такие натуральные числа, что число $7x$+$9y$ делится на 11. Доказать, что число $57x$+$78y$ делится на 11.

Решение: $57x$+$78y$=5($7x$+$9y$)+11($2x$+$3y$). Т.к. оба слагаемых делятся на 11, то их сумма тоже делится на 11.

6. Доказать, что число $(m+5n+7)^6\cdot(3m+7n+2)^7$ делится на 64 при любых натуральных m и n.

Решение. Если m и n оба четные или оба нечетные, то число $3m$+$7n$+2 – четное, то есть $3m$+$7n$+2 =$2k$ и $(3m+7n+2)^7 = 128k^7$ делится на 64. Если одно из чисел m, n – четное, а другое – нечетное, то $(3m+7n+2)^6 = (2p)^6 = 64p^6,\ \ p \in N$ делится на 64.

7. Доказать, что число 16^3+31^4-2 делится на 15.

Решение. $16^3+31^4-2 = (16^3-1)+(31^4-1) = 15(16^2+16+1)+(31-1)(31+1)(31^2+1^2)$. Каждое из двух слагаемых делится на 15, поэтому их сумма делится на 15.

8. Найти остаток от деления числа 39^{46} на 5.

Решение: $39^2 = 1520+1$. Остаток от деления 39^2 на 5 равен 1. $39^4 = (1520+1)^2 = 1520^2+2\cdot 1520+\ +1 = 5t+1,\quad t\epsilon N$. Продолжая этот процесс дальше, получим, что $39^{46} = (39^2)^{22}\cdot 39^2 = 5k+1,\ \ k\epsilon N$.

Ответ: 1.

9. Доказать, что число $96^9-32^5-48^6$ делится на 10.

Решение: Число 96^2 оканчивается цифрой 6. Значит, число $96^3, 96^4, \dots, 96^9$ оканчиваются цифрой 6. Число 32^2 оканчивается цифрой 4, 32^3 - цифрой 8, 32^4 - цифрой 6, 32^5 - цифрой 2. Число 48^2 оканчивается цифрой 4, 48^3 - цифрой 8, 48^4 - цифрой 6, 48^5 - цифрой 8, 48^6 - цифрой 4. Следовательно, число $96^9-32^5-48^6$ оканчивается цифрой 6-2-4=0, т.е. делится на 10.

10.Найти остаток от деления на 10 числа $2^{2002}+3^{2002}$.

Решение: Числа 2^k и 3^k повторятся через 4. Это значит, что если $k = 4n+r$, то последние цифры чисел 2^k и 3^k такие же, как у чисел 2^r и 3^r . Для нашего случая r =2. Поэтому последняя цифра суммы $2^{2002}+3^{2002}$ найдется из суммы $2^2+3^2 = 4+9, \text{т. е. эта цифра} -\ 3$.

Ответ: 3.

11. Пусть натуральное число n не делится на 3. Доказать, что число n^2-1 делится на 3.

Решение: Если $n \in N$ не делится на 3, то $n = 3k + 1$ или $n = 3k + 2$. В первом случае $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 3k(3k+2)$, а во втором случае $n^2 - 1 = (3k+1)(3k+3) = 3p, \quad p \in N$, т.е. в обоих случаях $n^2 - 1$ делится на 3.

12. Найти все целые n, при которых дробь $a = \frac{n^4 - n^3 + 2n^2}{n^2+1}$ будет целым числом.

Решение: Выделим целую часть дроби.

$a = \frac{n^4 - n^3 + 2n^2}{n^2+1} = \frac{(n^4+n^2)-(n^3+n)+(n^2+1)+(n-1)}{n^2+1} = n^2 - n + 1 + \frac{n-1}{n^2+1}$. Так как $n^2 - n + 1$ - целое число, то a является целым числом тогда и только тогда, когда $\frac{n-1}{n^2+1}$ - целое число. Этому условию удовлетворяют только целые числа: -1; 0; 1.

Ответ: {-1; 0; 1}

13. Доказать, что $n^5 - n$ делится на 5 при $\forall n \in N$.

Решение: Докажем от противного. Пусть $a = n^5 - n$ не делится на 5. Тогда 1) $n = 5p + 1$; 2) $n = 5p + 2$; 3) $n = 5p + 3$; 4) $n = 5p + 4$.

В случае 1) $a = (n-1)n(n+1)(n^2+1) = 5pq$, что противоречит предположению.

В случае 2) $a = (5p+1)(5p+2)(5p+3)(25p^2 + 20p + 4 + 1) = 5t.$

Снова получаем противоречие. Аналогично рассматриваются случаи 3) и 4).

14. Доказать, что а) число $6^{12} - 1$ делится на 37; б) $10^{12} + 263$ делится на 11.

Решение: 1) $6^{12} - 1 = (6^4)^3 - 1 = (6^4 - 1)(6^8 + 6^4 + 1) = (6^2 + 1)(6^2 - -1)p = 37q, \; p, q \in N.$

Следовательно, число $6^{12} - 1$ делится на 37.

2) $10^{12} + 263 = 10^{12} - 1$+264. Число $10^{12} - 1$ составлено из одних девяток, причем в его записи содержится четное число девяток (а именно,

12) . Поэтому это число делится на 11. Второе слагаемое 264 также делится на 11, поэтому само число $10^{12} + 263$ делится на 11.

Некоторые задачи на делимость легко решаются с помощью **теории сравнений.**

Пусть даны целые числа a и b и $m \in N$. Запись $a \equiv b (modm)$ означает, что $a - b$ делится на m! В частности, $a \equiv 0 (modm)$ $<=>$ a делится на m; $10 \equiv -1\ (mod 11)$ $<=>$ $10 - (-1)$ делится на 11; $7 \equiv -2\ (mod 3)$ $<=>$ $7 - (-2)$ делится на 3; $7 \equiv 4\ (mod\ 3)$ $<=>$ $7 - 4$ делится на 3 и т.д.

Основными **свойствами** сравнений являются:

1. Если $a \equiv b\ (mod\ m)$ и $b \equiv c\ (mod\ m)$, то $a \equiv c\ (mod\ m)$.

2. Сравнения по одному модулю можно складывать, вычитать и перемножать, как верные числовые равенства, т.е. если $a \equiv b\ (mod\ m)$ и $c \equiv d\ (mod\ m)$, то $a + c \equiv b + d (mod\ m)$, $a - c \equiv b - d\ (mod\ m), ac \equiv$ $\equiv bd\ (mod\ m)$.

3. Если k и $m \neq 1$ – взаимно простые числа (т.е. не имеют общих делителей), то $ak \equiv bk\ (mod\ m)$ $<=>$ $a \equiv b\ (mod\ m)$.

Перейдем к решению примеров.

15. Доказать, что число:

1) $a = 91^{40} - 55^{35}$ делится на 18.
2) $a = (75 \cdot 39)^{10} + (94 \cdot 58)^{15}$ делится на 19.
3) $a = 4^{15} + 233$ делится на 3.

Решение:

1) Заметим, что $91 \equiv 1\ (mod\ 18)$, $55 \equiv 1\ (mod\ 18)$. Поэтому по свойствам степеней $a = 91^{10} - 55^{35} \equiv 91 - 55\ (mod\ 18) = 1 - 1\ (mod\ 18) = 0\ (mod\ 18)$, т. е. число a делится на 18.
2) Т.к. $75 \equiv -1\ (mod\ 19)$, $39 \equiv 1\ (mod\ 19)$, $94 \equiv -1\ (mod\ 19)$, $58 \equiv 1\ (mod\ 19)$, то по основным свойствам степеней $a = (75 \cdot 39)^{10} + (94 \cdot 58)^{15} \equiv [(-1) \cdot (1)]^{10} + [(-1) \cdot (1)]^{5}\ (mod\ 19) = 0\ (mod\ 19)$, т.е. a делится на 19.

3) Т.к. $2^4 = 1\ (mod\ 3)$, $233 = -1\ (mod\ 3)$, то $a = 2^{30} + 233 = (2^4)^7 \cdot 4 + 233 \equiv 4 - 1\ (mod\ 3) = 3\ (mod\ 3) = 0\ (mod\ 3)$, т.е. a делится на 3.

16. Найти остаток от деления числа:

1) $25^{26} + 29^{26}$ на 3,

2) $2^{367} + 47$ на 17.

Решение: $25 \equiv 1\ (mod\ 3)$, $29 = -1\ (mod\ 3)$, тогда $25^{26} + 29^{26} \equiv (1)^{26} + (-1)^{26}\ \ mod\ 3 = 2\ (mod\ 3)$.

Следовательно, искомый остаток равен 2.

Ответ: 2.

2) $2^4 = 16 \equiv -1\ (mod\ 17)$, $43 \equiv 9\ (mod\ 17)$. Тогда $2^{367} = (2^4)^{91} \cdot 2^3 + 43 \equiv 8(-1)^{91} + 9\ (mod\ 17) = 1\ (mod\ 17)$.

Ответ: 1.

17. Доказать, что число

1) $a = 28 \cdot 20^{15} - 10 \cdot 18^{13}$ делится на 19,

2) $a = 100^{20} - 50 \cdot 16^5$ делится на 49,

3) $a = 71^{325} + 41^{135}$ делится на 7.

Решение:

1) $20 \equiv 1\ (mod\ 19)$; $18 = -1\ (mod\ 19)$. Тогда $a \equiv 28 \cdot (1)^{15} - 10 \cdot (-1)^{13} \cdot (mod\ 19) = 38(mod\ 19) \equiv 0(mod\ 19)$, ч.т.д.

2) $a = 2^{20} \cdot 50^{20} - 50 \cdot 2^{20} = 2^{20}(50^{20} - 50) \equiv$

$[\text{по свойству 3 сравнений}] \equiv 50^{20} - 50 \equiv 1(mod\ 49) - 1(mod\ 49) =$

$= 0\ (mod\ 49)$, ч.т.д.

3) $71 \equiv 1\ (mod\ 7)$, $41 \equiv -1\ (mod\ 7)$. Поэтому $a \equiv (+1)^{325} + (-1)^{135}\ (mod\ 7) = 0\ (mod\ 7)$, ч.т.д.

18. Найти остаток от деления числа $a = 12^{316}$ на 19.

Решение:

$12 \equiv -7\ (mod\ 19)$. Тогда $12^{316} \equiv (7^4)^{79}\ (mod\ 19) \equiv 7^4(mod\ 19) = 2401\ (mod\ 19)$. Здесь мы воспользовались тем, что последние цифры числа 7^k, $k \in N$ (как и чисел 2^k и 3^k) повторяются через 4. Это означает, что если

$k = 4p + r,\ \ p \in N,\ r$ – остаток от деления k на 4, то последние цифры числа 7^k такие же, как у числа 7^r $(r = 1, 2{,}3)$. Если же r=0 (как в нашем случае), то последние цифры числа 7^k, такие же, как у числа $7^4 = 2401$.

Ответ: 7.

Задания для самостоятельного решения.

1) Доказать, что число $555^{777} + 777^{555}$ делится на 37.
2) Доказать, что если k произведение четырех последовательных натуральных чисел прибавить единицу, то получится число, равное квадрату некоторого натурального числа.
3) Доказать, что число:

а) $10^{10} + 28^3 - 2$ делится на 9,

б) $36^3 + 19^3 - 16$ делится на 17.

4) Найти последнюю цифру числа $12^{39} + 13^{41}$. (1)

5) Найти остаток от деления

а) числа 64^{29} на 7, (1)

б) числа 103^{15} на 17, (1)

в) числа $10^{10} + 28^3 - 1$ на 3, (1)

г) числа $7 \cdot 10^3$ на 9. (7)

6) Найти остаток от деления числа $36^{24} + 21^{45} + 7^8$ на 10 (8)

7) Доказать, что $96^9 - 32^5 - 48^6$ делится на 10.

8) Найти остаток от деления на 11 числа a, если $a = 2^{2002} + 3^{2002}$ (2)

9) Пусть натуральные числа a, b и c не делятся на 3. Докажите, что число $a^2 + b^2 + c^2$ делится на 3.

10) Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

11) Найти остаток от деления числа $10^2 \cdot 5^{45}$ на 8. (4)

12) Доказать, что число $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ делится на 3 при $\forall\ n \in Z$.

13) Доказать, что $2n^3 - 3n^2 + n$ делится на 6 при $\forall\ n \in N$ $(n > 1)$.

14) Доказать, что число:

1) $2^{48}-1$ делится на 65,

2) $3^{17}-3$ делится на 240,

3) $10^{24}-298$ делится на 99.

15) Доказать, что число:

1) $84^{20}+101^{19}$ делится на 17,

2) $10^{327}+56$ делится на 11.

16) найти остаток от деления числа

1) $2^{367}+43$ на 17, (1)

2) $2^{1995}+5\cdot 10^{3}$ на 3, (1)

3) $2^{76}+3\cdot 10^{13}$ на 9 (1)

17) Доказать, что число:

1) $3^{3}\cdot 23^{8}+5^{8}\cdot 2^{14}$ делится на 13,

2) $125^{24}-1825$ делится на 600,

3) $42^{365}+53^{241}$ делится на 5.

18) Найти все целые числа n, такие, что $a=\frac{n^4+3n^2+7}{n^2+1}$ являются целыми.

$(\{-2;0;2\})$

19) Доказать, что при любых натуральных m и n число $a=(5m+7n+$ $+3)^{6}(3m+9n+2)^{5}$ делится на 32.

20) Найти остаток от деления числа $a=15^{254}$ на 17. (4)

Литература

1. Ю.М. Колягин и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни, М.: Просвещение, 2017
2. С.М. Никольский и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни, М.: Просвещение, 2017